

随机排列的不动点

复刻版与修订版

来源. 本文件是根据哔哩哔哩视频 《**【日常研究】摆烂小能手掀起的数学问题**》(视频编号 BV1Fh411N71S) 中展示的数学文章, 独立制作的 L^AT_EX 复刻与编辑修订:

<https://www.bilibili.com/video/BV1Fh411N71S>

作品页面. 本作品的主页面收录三个版本及其下载链接:

<https://opuscula.ritsuka.moe/euler-derangement-cloze/>

PDF 版本.

[paper-en.pdf](#) [paper-en-revised.pdf](#) [paper-zh.pdf](#)

源文件仓库. 本项目的 L^AT_EX 源文件、编译 PDF 与版本说明可在

<https://github.com/Ritsuka314/opuscula> 获取.

用途. 本复刻项目仅供娱乐与教育用途. 本项目并非官方版本, 不作为经原作者认可的逐字稿, 亦不表示与视频作者或哔哩哔哩平台存在任何隶属或合作关系.

三个版本的区别.

1. **英文复刻版.** 尽可能忠实地排印视频中可见的四页英文文章, 并有意保留原文中不规范的英语表述、内容省略、符号习惯与归纳计算.
2. **英文修订版.** 一份经过订正且内容自足的数学报告. 该版严格定义模型, 利用容斥原理证明错排公式, 给出统一的概率分布, 并用示性随机变量证明期望.
3. **中文修订版.** 英文修订版的规范中文对应版本. 该版采用相同的定义、结论与证明, 而不是对英文复刻版的不规范措辞作逐字翻译.

本文件版本: 中文修订版

本版以修订英文本为基础, 用规范的中文重新撰写, 并采用相同的定义、结论与证明.

依据上述来源视频使用 L^AT_EX 排版.

随机排列的不动点

期望与概率分布

摘要

从 n 个元素的所有排列中等概率地任取一个排列，令 X 表示其中不动点的个数。本文先直接证明：对任意正整数 n ，都有 $\mathbb{E}[X] = 1$ ；再用容斥原理逐步推导错排公式，进而求出 X 的精确概率分布。这一结果也可用于描述如下情形：将 n 个互不相同的选项随机填入 n 个互不相同的空格时，填对的平均个数为 1。

1 问题设定

对正整数 n ，记

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

从对称群 S_n 的 $n!$ 个元素中等概率地选取一个排列 $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ 。若 $r \in [n]$ 满足 $\sigma(r) = r$ ，则称 r 为 σ 的一个**不动点**。定义

$$X = |\{r \in [n] : \sigma(r) = r\}|.$$

我们的首要问题是求 X 的期望；随后还将求出它的完整概率质量函数，作为更强的结论。

2 不动点个数的期望

定理 1. 对任意 $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[X] = 1.$$

证明. 对每个 $r \in [n]$ ，定义示性随机变量

$$I_r = \begin{cases} 1, & \sigma(r) = r, \\ 0, & \sigma(r) \neq r. \end{cases}$$

于是 $X = \sum_{r=1}^n I_r$ 。在全部 $n!$ 个排列中，固定某个给定位置 r 的排列恰有 $(n-1)!$ 个，故

$$\Pr(\sigma(r) = r) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{E}[I_r] = \frac{1}{n}.$$

由期望的线性性质，

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{r=1}^n \mathbb{E}[I_r] = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

这一论证不要求各示性随机变量彼此独立。 □

等价的双重计数观点. 考虑所有满足 $\sigma(r) = r$ 的有序对 $(\sigma, r) \in S_n \times [n]$. 给定 r 后, 固定 r 的排列恰有 $(n-1)!$ 个, 因此这种有序对共有 $n(n-1)! = n!$ 个. 再除以排列总数 $n!$, 便再次得到: 每个排列平均有一个不动点.

3 错排与精确分布

上述期望证明不需要知道 X 的概率分布. 若要进一步求出每个 $\Pr(X = k)$, 则须先计算没有任何不动点的排列数.

3.1 错排计数

没有任何不动点的排列称为**错排**. 用 D_m 表示 m 个元素的错排数, 并约定 $D_0 = 1$.

定理 2 (错排公式). 对任意整数 $m \geq 0$,

$$D_m = m! \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!}.$$

因此, 从 m 个元素的所有排列中等概率地任取一个, 得到错排的概率为

$$\frac{D_m}{m!} = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!}.$$

证明. 当 $m = 0$ 时, 唯一的空排列就是错排, 公式给出 $D_0 = 1$. 以下设 $m \geq 1$, 并以全部 $m!$ 个排列组成的集合 S_m 为全集. 对每个 $r \in [m]$, 令

$$A_r = \{\sigma \in S_m : \sigma(r) = r\},$$

即 A_r 是所有固定 r 的排列组成的集合. 一个排列是错排, 当且仅当它不属于 $A_1, \dots, A_m$ 中的任何一个, 因此

$$D_m = \left| \bigcap_{r=1}^m \overline{A_r} \right|.$$

容斥原理先计入全部 $m!$ 个排列, 再减去固定每个指定元素的排列; 同时固定两个指定元素的排列在上一步被重复减去, 故须加回, 依此交替进行:

$$\begin{aligned} D_m &= |S_m| - \sum_{r=1}^m |A_r| + \sum_{1 \leq r < s \leq m} |A_r \cap A_s| - \dots \\ &\quad + (-1)^m |A_1 \cap \dots \cap A_m|. \end{aligned}$$

为了计算各项, 选取子集 $J \subseteq [m]$, 并设 $|J| = j$. 若要求 J 中的每个元素都保持不动, 则剩下的 $m-j$ 个元素可以任意排列, 故

$$\left| \bigcap_{r \in J} A_r \right| = (m-j)!.$$

当 $J = \emptyset$ 时, 上式中的交集约定为全集 S_m , 因而这里也包含 $j = 0$ 的情形. 这样的集合 J 共有 $\binom{m}{j}$ 个. 按 j 合并容斥式中的各项, 便得到

$$\begin{aligned} D_m &= \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)! \\ &= m! \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

最后还可以直接验证, 这个交错和恰好只留下错排. 若一个排列有 $q \geq 1$ 个不动点, 那么在指定 j 个不动点的各项中, 它共出现 $\binom{q}{j}$ 次, 因而它在整个交错和中的净系数为

$$\sum_{j=0}^q (-1)^j \binom{q}{j} = (1-1)^q = 0.$$

错排没有不动点, 即 $q = 0$, 所以恰好被计数一次. 这也直接说明了容斥原理在此处为何有效.

再除以排列总数 $m!$, 即得所述概率公式. □

例如,

$$D_3 = 3! - \binom{3}{1}2! + \binom{3}{2}1! - \binom{3}{3}0! = 6 - 6 + 3 - 1 = 2.$$

用单行记法表示, 这两个错排是 $[2, 3, 1]$ 与 $[3, 1, 2]$.

当 $m \geq 2$ 时, $j = 0$ 与 $j = 1$ 两项相互抵消, 因此上述概率也可写成

$$\sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{j!}.$$

这正是复刻英文本所采用的形式.

3.2 不动点个数的分布

定理 3. 对 $k = 0, 1, \dots, n$,

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

证明. 先选出恰好保持不动的 k 个位置, 共有 $\binom{n}{k}$ 种选法; 其余 $n-k$ 个位置必须构成错排, 共有 D_{n-k} 种. 因此, 恰有 k 个不动点的排列数为 $\binom{n}{k} D_{n-k}$. 除以排列总数 $n!$, 并代入错排公式, 得到

$$\begin{aligned} \Pr(X = k) &= \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

□

这一统一公式也包含两个边界情形：

$$\Pr(X = n) = \frac{1}{n!}, \quad \Pr(X = n - 1) = 0.$$

第二个等式成立，是因为一个排列不可能只移动一个元素而固定其余所有元素。

4 结论

直接使用示性随机变量即可看出：均匀随机排列平均有一个不动点。进一步计数还可得到其精确分布

$$\Pr(X = k) = \frac{\binom{n}{k} D_{n-k}}{n!},$$

其中错排数 D_{n-k} 由容斥原理求得。因此，将 n 个互不相同的答案等概率地随机填入 n 个互不相同的空格时，平均会填对一个。这里的“一个”是期望值；在某次具体尝试中，可能一个也没填对，也可能填对一个或多个。